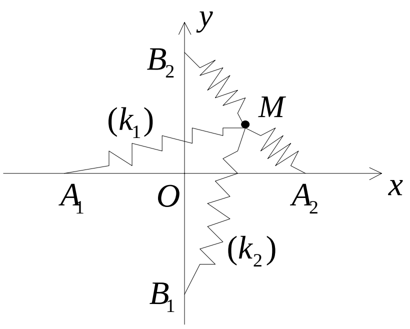
-EXERCICE 12.4-

• ENONCE :

« Point matériel relié à 4 ressorts »



Un point matériel M, de masse m, peut se déplacer sans frottements sur un plan **horizontal**.
Il est relié à 2 points fixes A_1 et A_2 par des ressorts de raideur k_1 , et à 2 autres points fixes B_1 et B_2 par des ressorts de raideur k_2 .
Lorsque les ressorts sont sans tension, ils ont une longueur l_0 ; par ailleurs, on a :

$$A_1O = A_2O = B_1O = B_2O = l_0$$

On pose : $\omega_1^2 = \dfrac{2k_1}{m}$ et $\omega_2^2 = \dfrac{2k_2}{m}$

• On suppose que les déplacements de M restent petits : ainsi, on a toujours x et $y \ll l_0$.

1) Déterminer l'énergie potentielle totale de la masse m.
2) Déterminer le mouvement de M : à quelle condition est-il périodique ?
3) On donne : $\omega_2 = 2\omega_1$; $x(0) = x_0$ et $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$; $y(0) = 0$ et $\dfrac{dy}{dt}(0) = 2y_0\omega_1$.

   Dessiner la trajectoire du point matériel M.

• CORRIGE :

«Point matériel relié à 4 ressorts »

1) Les forces qui agissent sur M sont : le poids et la réaction du plan horizontal, qui se compensent en l'absence de frottements ; les forces de rappel des 4 ressorts.

La seule énergie potentielle susceptible de varier est celle qui est associée aux ressorts ; pour le ressort relié à A_1, nous écrirons :

$$E_{PA1}=\frac{1}{2}k_1(A_1M-l_0)^2 \text{ , avec : } A_1M=\left((l_0+x)^2+y^2\right)^{1/2}=l_0\left(1+\frac{2x}{l_0}+\frac{x^2+y^2}{l_0^2}\right)^{1/2}\simeq l_0\left(1+\frac{x}{l_0}\right)=l_0+x$$

(au 1[er] ordre en $\frac{x}{l_0}$ et $\frac{y}{l_0}$) $\Rightarrow$ $\boxed{E_{PA1}\simeq\frac{1}{2}k_1x^2}$

• De la même manière, on aurait : $A_2M=\left((l_0-x)^2+y^2\right)^{1/2}\simeq l_0-x$ (toujours au 1[er] ordre) ; d'où :

$$\boxed{E_{PA2}=E_{PA1}\simeq\frac{1}{2}k_1x^2}$$

• Par analogie, on en déduit :

$\boxed{E_{PA2}=E_{PA1}\simeq\frac{1}{2}k_1x^2}$ $\Rightarrow$ l'énergie potentielle totale s'écrit : $\boxed{E_P=k_1x^2+k_2y^2+cste}$

2) Toutes les forces dérivant d'un potentiel, la résultante de ces forces $\vec{F}$ a pour expression :

$\vec{F}=-\overrightarrow{grad}E_P=-\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{e}_x-\frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{e}_y$ $\Rightarrow$ le PFD appliqué au point M donne en projection :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\frac{\partial E_P}{\partial x}=-2k_1x \quad \text{et} \quad m\frac{d^2y(t)}{dt^2}=-\frac{\partial E_P}{\partial y}=-2k_2y \text{ , ou :}$$

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_1^2x(t)=0 \Rightarrow x(t)=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)} \qquad \boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\omega_2^2y(t)=0 \Rightarrow y(t)=A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2)}$$

• Pour que le mouvement soit périodique, il faut qu'il existe un temps T tel que x **ET** y reprennent la même valeur, d'où :

$T=nT_1=mT_2$ où n et $m\in\mathbb{N}$, avec $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ et $T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_2=p\omega_1 \text{ , avec } p\in\mathbb{Q}}$

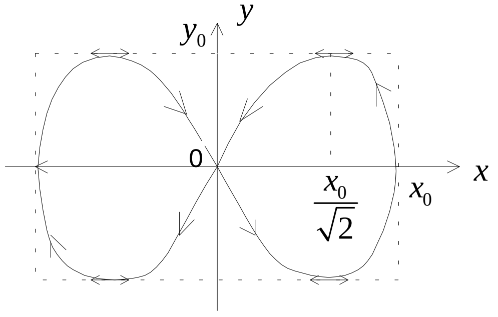
3) Ecrivons $x(t)$ sous la forme : $x(t)=A_1\cos\omega_1t+B_1\sin\omega_1t$

$\Rightarrow x(0)=A_1=x_0$ et $\frac{dx}{dt}(0)=\omega_1B_1\cos(0)=0 \Rightarrow B_1=0 \Rightarrow$ $\boxed{x(t)=x_0\cos\omega_1t}$

• D'autre part, écrivons : $y(t)=A_2\cos\omega_2t+B_2\sin\omega_2t$

$\Rightarrow y(0)=A_2=0$ et $\frac{dy}{dt}(0)=\omega_2B_2\cos(0)=2\omega_1y_0=\omega_2y_0 \Rightarrow B_2=y_0 \Rightarrow$ $\boxed{y(t)=y_0\sin(2\omega_1t)}$

• On peut alors tracer la courbe ci-dessous :



Pour tracer la courbe, il faut s'intéresser aux valeurs particulières de la fonction qui **varie le plus vite**, c'est-à-dire y(t); ainsi:

pour $2\omega_1 t = 0$, $y = 0$ et $x = x_0$

pour $2\omega_1 t = \pi / 2$, $y = y_0$ et $x = x_0 / \sqrt{2}$

pour $2\omega_1 t = \pi$, $y = 0$ et $x = 0$

Rq : l'étude des symétries permet de compléter la courbe dans les 4 quadrants.